Milo Beckman: Matematika számok nélkül. Libri Kiadó, 2022; ISBN: 9789634339120

> *„Arkhimédészre emlékezni fognak, amikor Aiszkhüloszra már nem, mert a nyelvek meghalnak, a matematika eszméi nem. A 'halhatatlanságra', bármit jelentsen is, valószínűleg a matematikusnak van a legjobb esélye."*
> G. H. Hardy: A Mathematician's Apology

Ez egy egészen különleges könyv: matematikáról számok nélkül. Kicsit csalós is, mert igazából csak a matematika bizonyos átfogó területeiről szól, de a címével kitűzött cél így is meghökkentően merésznek ígérkezik. Érdemben, legalább pár jellemző részt is bemutatva írni róla, szintúgy merész vállalkozás, mert a mondandó magyarázatát sok szellemes grafika segíti, amelyekből értelemszerűen nem tudunk ide idézni. Az *Amazon ajánlója* ezzel kezdődik: „Illusztrált bejárása a szerkezeteknek és rendszereknek, amelyeket 'mateknak' nevezünk." Róla pusztán szavakkal, az illusztrációk elhagyásával szólni, ez a hajdanvolt jónevű színész és kupléénekes nagy slágerét idézi, amelyet Kibédy Ervin tett még népszerűbbé: „Én nem hiszem, hogy normális vagyok." Ámde, ez a könyv *„itt van"* (l. Sir Edmund Hillary híres mondását a Mount Everest megmászásáról), és nem lehet neki ellenállni...

Beckman bemutatása a könyvben: „Egész fiatal korában szerette meg a matematikát. 1995-ben született Manhattanben, *már nyolcévesen bejárt a Stuyvesant Gimnázium matematikaóráira, tizenhárom éves korában pedig ő lett a New York-i Matematikacsapat kapitánya*. Különböző projektjeinek és független kutatásainak eredményeit leközölte a New York Times, a FiveThirtyEight, a Good Morning America, a Salon, a Huffington Post, a Chronicle of Higher Education, a Business Insider, a Boston Globe, a Gothamist, az Economist és még számos nívós folyóirat. Három műszaki cég, két bank és egy amerikai szenátor is igénybe vette szolgáltatásait, majd tizenkilenc éves korában 'nyugdíjba vonult', azóta New Yorkban, Kínában és Brazíliában tanított matematikát, közben pedig ezen a könyvön dolgozott." (Kiemelések a recenzió szerzőjétől.)

Az Amazon ajánlójából: „A könyvben nincs más szám, csak az oldalszámok. Egy élénk, cs*evegő, és teljes mértékben eredeti kalauz az absztrakt matematika három fő ágához* – topológia, analízis és algebra –, amely *meglepően könnyen felfoghatónak bizonyul*. (Azért 'királyi utat' ez sem ad, nem mentesít attól, hogy gondolkodnunk kelljen az olvasottak megértéséhez, helyenként nem is kicsit! – Osman P.) *Ez a könyv fejre állítja a matematika hagyományos megközelítését*, s arra hív bennünket, hogy kreatívan gondolkodjunk az alakról és a dimenzióról, a végtelenről és a végtelenül kicsiről (infinitezimális), szimmetriákról, bizonyításról, s hogy mindezek a fogalmak miként illeszkednek össze. *Ami itt az olvasókra vár*, az egy kötetlen bejárása e furcsán erőteljes témakör utánozhatatlan örömeinek és megoldatlan titkainak. *Nem volt még ehhez hasonló könyv a matematikáról*. Sok népszerűsítő mű időzött el számokon, mint a pi, a nulla vagy a végtelen. Ez jóval messzebbre megy, hogy olyan kérdéseket tegyen fel, mint '[h]ány forma létezik?', 'Van bármi nagyobb, mint a végtelen"', '[a]matematika a valóságot mutatja?', *Beckman megmutatja*, miért van, hogy a matematika többnyire egyszerűen alakzat-felismerés, és miként lep meg bennünket folyamatosan a való világhoz kötődő váratlan, hasznos kapcsolódásaival.

E könyv törekvéseihez különleges szerző kell: találékony; kreatív, eredeti gondolkodó, aki örvendező szenvedéllyel igyekszik megfelelni hivatásának. Egy csodálatos tehetség."

Kirkus Reviews (1933 óta működő könyvkritika magazin): „Egy kellemes, szórakoztató pillantás a matematikára, mint a mindenek leírására. *Egy csodálatos matematikai tehetség vizsgálja, miként látják a matematikusok a világot*. A matematika megszállottjai változó sikerrel próbálják elmagyarázni kedvenc tárgyukat a nagyközönségnek – még akkor is, ha nagyon igyekeznek megragadni a figyelmüket számítási trükkökkel, paradoxonokkal, vagy épp illúziókkal. Beckman mindezeket elkerüli, állítva, hogy mindent – növényeket, szerelmet, zenét, tényleg mindent – meg lehet érteni a matematikai fogalmaival, s rá is tér, miként igyekeznek erre a matematikusok. Ők imádják túlgondolni a dolgokat." A Kirkus ezután példákat hoz Beckman matematikai fejtegetéseiből, majd így folytatja: „Végül is, *Beckman úgy érvel, hogy a matematika nem számokról vagy egyenletekről szól, hanem modellekről*. Egy modell a jelenségeket sajátos szabályokká szálazza szét, amelyek alkalmazása megmagyarázza azt. Néhány egyszerű szabály kialakít egy 'kvázi játszmát' (játékelméleti értelemben – Osman P.), amely figyelemreméltóan hasonlít a darwini természetes szelekcióhoz. Fejtegetését egy modellel zárja, amely egy 17 részecskét tartalmazó üres térből áll, ezek jól meghatározott, bár abszurd szabályokat követnek, a végeredmény pedig a Standard Modell, a fizikusok legjobb magyarázata arra, miként működik a világmindenség."

Hic Rhodus, lássuk magát a könyvet! (Innentől minden idézet belőle.) Beckman rövid krédóval – ha tetszik, „küldetésnyilatkozattal" – indít: „Miben hisznek a matematikusok? Hisszük, hogy a matematika érdekes, igaz és hasznos (ebben a sorrendben).

Hiszünk egy 'matematikai bizonyításnak' nevezett eljárásban. Hisszük, hogy a bizonyítás útján megszerzett tudás fontos és hathatós.

A *fundamentalista matematikus* hisz abban, hogy minden – a növények, a szeretet, a zene, valóban minden – (elméletileg) megragadható a matematika fogalmaival."

További bevezetéssel, előszóval nem bajlódik, ennek helyén egy háromágú fa áll: törzse az „Iskolai matematika", ágai: „Topológia", „Analízis", „Algebra". S máris, in medias res, .

„*Topológia,* fejezetei: *Alakzatok / Sokaságok / Dimenziók*.

Alakzatok. A matematikusok szeretik átgondolni a dolgokat. Ez a módszerünk. Veszünk egy fogalmat, amit valamilyen szinten mindenki ért, például a szimmetria vagy az egyenlőség fogalmát, *majd darabokra szedjük, és megpróbálunk találni benne egy mélyebb jelentést*. (Jó szó a „valamilyen szinten"! Vajon az emberek mekkora hányada nem jön zavarba, ha nagy hirtelen meg kellene mondania, mit is jelent a szimmetria? – Osman P.) Vegyük csak az alakot. Többé-kevésbé mindenki tudja, mit értünk alak alatt. Ránézel egy tárgyra, és pillanatok alatt látod, hogy kerek vagy szögletes, vagy másmilyen. Ám egy matematikus tovább kérdez: Mi az alak? Mitől olyan valaminek az alakja, amilyen? Ha egy tárgyat az alakja alapján azonosítunk, akkor nem foglalkozunk a méretével, a színével, a használhatóságával, a korával, a súlyával, azzal, hogy ki hozta és hogy ki viszi haza. Mivel is foglalkozunk tulajdonképpen? Mi játszódik le a fejünkben, amikor azt mondjuk, hogy valami kör alakú? Ezek a kérdések persze értelmetlenek. Nincs gyakorlati hasznuk, hiszen az ember ösztönösen is felismeri a formákat, az alakzatokat, és ez rendben is van így – *az életben semmi fontos dolog nem múlik azon, hogy hogyan is definiáljuk az 'alak'* fogalmát. Egyszerűen csak érdekes gondolkodni rajta, ha épp van egy kis szabadidőd, amit épp ezzel akarsz kitölteni." – Vigyázat, ez csali! Kissé általánosítva, azzal nyugtat, hogy „nincs itt, kérem, semmi nehezebb gondolkodnivaló!", pedig ha szó szerint vennénk, az értelmes elemző és okfejtő gondolkodás egészét dobnánk ki az ablakon, s vele a filozófiát is nehezéknek. Igaz, „a boltban" semmit sem adnak olcsóbban azért, mert ismerjük a matematikát – számokkal vagy azok nélkül –, ám, akárcsak a nyers gyakorlatiasságnál maradva, a jövedelmünk, és vele többé-kevésbé az életminőségünk is jócskán múlhat azon, mennyire tudunk gondolkodni, szintúgy mások gondolkodását követni és érteni, s mennyi képzelőerővel bírunk ehhez. *Beckman pedig máris kemény edzőpályára visz ebben*. S még ehhez: „az ember ösztönösen is felismeri a formákat, az alakzatokat". Ez bizonyos körben igaz, ahogy az állatok is képesek életük keretei közt ilyesmire, ám „ösztönös" topológiai, geometriai felismerő képességeink nincsenek, azt tanulni kell. Jó példa erre, ahogy Beckman a következő lépésben bevezeti a kategorizálást, azaz a csak az emberi faj birtokában lévő, tanult képesség, az absztrakció egyik megjelenési módját. Valójában már a „ránézel egy tárgyra, és pillanatok alatt látod, hogy kerek vagy szögletes, vagy másmilyen" is idetartozik, ahogy az állatok sokféle növényt ismerhetnek, de a „növény", „fű", „virág" fogalma nincs meg nekik.

„Tegyük fel, hogy így van. Íme egy kérdés, ami máris felmerülhet benned: Hányféle forma létezik egyáltalán? (Kezdődik a 'könnyed' szemléltetés: a kérdés a képregények szokásos buborékában jelenik meg. S hogy voltaképp milyen kemény felütés, az rögvest meglátszik a folytatásban – Osman P.) *Ez elég egyszerű kérdés*, még sincs rá könnyű válasz. A kérdés precíz, pontosan definiált verzióját általánosított Poincaré-sejtésnek nevezik, és *már jó egy évszázada foglalkoztatja a matematikusokat, ennek ellenére még mindig nem tudta megoldani senki*. Pedig rengetegen próbálkoztak vele, néhány éve egy zseniális matematikusnak oda is ítélték az egymillió dolláros díjat, mivel a probléma egy nagyon nagy részét sikerült megoldania. De még mindig vannak számba nem vett kategóriák, úgyhogy igazából a mai napig fogalmunk sincs, hányféle forma létezik. Próbáljuk meg mégis megválaszolni ezt a kérdést. Hányféle forma létezik? Ha nincs jobb ötletünk, kezdjünk felrajzolni különféle alakzatokat, aztán meglátjuk, mi sül ki belőle." Különféle ábrák a képen, és *a gondolatmenet felvezeti a kategóriákat és a kategorizálást*:

„Úgy tűnik, *attól függ a válasz, hogy pontosan hogyan soroljuk be az alakzatokat különböző kategóriákba*. A nagy kör ugyanaz az alakzat, mint a kis kör? A 'krikszkraksz' egy kategóriát alkot, vagy felosztjuk további kategóriákra attól függően, hogy mennyire cirkalmas? *Szükség lenne tehát valami általános szabályra*, amellyel az efféle viták elkerülhetők. Ne kelljen minden esetben mérlegelni, hogy az adott alakzat külön kategóriába tartozik, vagy besorolható egy korábbiba. *Számos olyan szabály létezik*, amely remekül megfelel a célnak, azaz segítségükkel megállapíthatjuk, hogy két alakzat ugyanaz vagy különböző. Az ilyen szabályokból alakult ki *a matematikának az a része, amelyet geometriának nevezünk*. A geometriában az egyes alakzatok pontosan definiáltak.

Mi ennél kissé rugalmasabb rendszert szeretnénk. Hiszen *az összes lehetséges alakzatot keressük*, és nincs időnk a krikszkrakszok sok ezer változatának átválogatására. Olyan szabályt keresünk, amely elég nagyvonalúan mondja ki két alakzatról, hogy valójában azonos, így *az alakzatok világát kezelhető mennyiségű kategóriákra osztja*.

[Szövegdobozban:] Új szabály: *Két alakzat azonosnak tekintendő, ha az egyikből eljuthatunk a másikba nyújtással és összenyomással, szétvágás és összeragasztás nélkül*.

Ez a szabály a topológia központi gondolata. A topológiát a geometria kevésbé szigorú, engedékenyebb változatának tekinthetjük. Az alakzatokat vékony, végtelenül nyújtható anyagúnak képzeljük, amelyet úgy lehet csavargatni és nyújtani, mint a gumit vagy a tésztát. *A topológiában az alakzat mérete nem játszik szerepet*.(Annál inkább az ember képzelőereje, amelyet Beckman példái, magyarázatai olykor igencsak próbára tesznek – Osman P.) Itt a négyzet azonos a téglalappal, nem teszünk különbséget a kör és az ovális között sem.

Itt kezdődnek a furcsaságok. Erre a 'nyújtós-összenyomós' szabályra gondolva könnyen beláthatod, hogy a kör és a négyzet ugyanaz! [DE:] A négyzet valóban kör, de csak a topológiában. Ha topológiával foglalkozunk, akkor nem ragadunk le olyan jelentéktelen részleteknél, mint a hegyes szögletek, amelyeket könnyedén szét lehet masszírozni. Nem érdekelnek olyan felszínes különbségek, mint amilyen a szög, a hossz, az egyenes vagy ívelt él. *Csak a lényegre koncentrálunk, ami a formát alapvetően meghatározza: azokra a jellemzőkre, amelyektől egy bizonyos alakzat az lesz, ami*. Amikor a topológus ránéz egy négyzetre vagy egy körre, nem lát mást, csak egy *zárt hurkot*. Minden más attól függ, hogy adott pillanatban hogyan nyújtottad vagy nyomtad össze az alakzatot. Az szinte bármilyen alakot felvehet, a *lényeg, hogy önmagába záródó hurok*, *hivatalos neve a topológiában ‚S1'*. Ahogy a négyzet a téglalap egy speciális esete, a kör pedig az ellipszisé, mindezek az alakzatok az S1 speciális esetei.

Vannak más alakzatok is? *A topológiában léteznek olyan alakzatok, amelyek nem azonosak a körrel*. Például a *vonal*, amit drótdarabként is elképzelhetsz. A drótot meg lehet hajlítani úgy, hogy majdnem kör legyen belőle, de ahhoz, hogy tényleg kör legyen, a két végét össze kellene érinteni – s ez már nem megengedett. Mert tehetsz a dróttal bármit, de arra ügyelned kell, hogy mindig megmaradjon a két kitüntetett pont a két végén, ahol a drót véget ér. *A két végpont az, ami ennek az alakzatnak elengedhetetlen jellemzője*. Ezért mondjuk a *nyolcas*ra, hogy az már megint egy *másik alakzat*. Annak ugyan nincsenek végpontjai, de mégiscsak *van egy különleges pontja a közepén*, ahol a vonalak keresztezik egymást. Ebből a pontból négy kar nyúlik ki , ellentétben a többivel, amelyekből csak kettő. Bárhogy nyújthatod, nyomkodhatod, a kereszteződéstől nem szabadulsz meg. (Igazából tehát ez utóbbi alakzatok egyetlen közös meghatározó jellemzője, hogy egyetlen olyan pontjuk van, amelyből négyfelé folytatódik az ábra! – Osman P.)

Ennyi információ már elég is, hogy megválaszoljuk az eredeti kérdésünket: 'Hányféle forma létezik?' A válasz: végtelen. *Ezt be is bizonyítom*. (A bizonyítás elegánsan egyszerű és klasszikus, elfér egy kis szövegdobozban, három ábrával és hét sorral. A lényege, szavakba öntve, a következő – Osman P.) Annyi a dolgod, hogy keresel egy végtelen alakzatcsaládot, ahol nyilvánvaló, hogyan lehet új alakzatokat létrehozni tetszőlegesen sokszor megismételhető művelettel. (Rajzos példákat kapunk, majd az általánosítást, amely az adott feladaton túlmenően nagyon is jellemző a matematikai bizonyítások egyik jellegzetes gondolkodásmódjára – Osman P.) Bármelyiket is választod bizonyítás gyanánt, az alapelv ugyanaz. Meg akarod mutatni, hogy valamiből végtelen sok létezik, s ezt úgy éred el, hogy leírsz egy eljárást, amelynek a végén előáll egy új, többitől különböző példány az adott dologból. Ezt nevezzük '*végtelen család*' *érvelés*nek, és a matematikában elég gyakran alkalmazzuk, ha azt akarjuk megmutatni, hogy valamiből végtelen sok van. Számomra elég meggyőző is – és el sem tudom képzelni, hogyan lehetne megcáfolni. Kell, hogy végtelen sok legyen valamiből, ha egyszer mindig képesek vagyunk újabbat és újabbat létrehozni belőle."

A barbatrükk: Matekot különböző szinteken és iskolákban mindannyian tanultunk, s talán a legtöbbünk húzódozott tőle, vagy épp utálta. Miért? Mert rosszul tanították, kötelezően bebiflázandóként, nem mutatva meg világának sokszínű és -rétű érdekességét, szépségét. Beckman itt rövid, megragadó példát ad arról, miként kell ezt tenni, hogy ne csak tudjuk, de megértsük a belső logikáját, és megszeressük annak bölcsességét. Folytatva az előzőeket:

„És ezt nem csak én gondolom így. A matematikusok teljes közössége elfogadja a 'végtelen család' érvelést érvényes matematikai bizonyításnak. Van még egy sor ehhez hasonló bizonyítási módszer, ugyanezt az érvelést használhatjuk különböző kontextusban, hogy különböző dolgokat bizonyítsunk. Akik sokat foglalkoznak matematikával, előbb-utóbb észreveszik, hogy ugyanazt az érvelést használják újra meg újra. És (legtöbbször) mindenki egyetért abban, hogy melyek azok a bizonyítások, amelyeket elfogadhatónak, azaz érvényesnek tartunk." *A kvintesszencia*: „Ha egyszer felteszünk egy kérdést, és lefektetjük a válaszadás szabályait, a válasz tulajdonképpen már meg is van. Csak még meg kell találnunk."

A következő fejezet: *Sokaságok: „Mivel túl sok alakzat létezik, a topológusok a fontosakra koncentrálnak. Ezek a sokaságok*. Ez elsőre talán bonyolultan hangzik, pedig nem az. Hiszen mi is egy sokaságon élünk. Körök, egyenesek, síkok, gömbök: *a sokaságok olyan sima, egyszerű, egyforma alakzatok, amelyek, úgy tűnik, mindig fontos szerepet kapnak, amikor a matematikában és más tudományokban fizikai terekkel dolgozunk. Annyira egyszerűek, hogy az ember azt hinné, már az* összeset *meg kellett találnunk. Hát nem*. A topológusokat eléggé nyugtalanítja is ez a tény, olyannyira, hogy egymillió dolláros díjjal próbálják ösztönözni a hatékonyabb keresgélést. *A topológiának ez a legfontosabb megoldatlan kérdése*, amely immár több mint egy évszázada foglalkoztatja és egyben frusztrálja a terület legnagyobb elméit: ’*Hányféle sokaság létezik?’* Kicsit pontosabban fogalmazva: ’*Mely sokaságok léteznek?’* (Érdekes! Az első kérdés világos: a fajták számát kérdezi. Amit Beckman pontosabbnak mond, az mintha taxatív felsorolásra kérdezne rá. Voltaképp a kérdés angol eredetije többértelmű, legalábbis a téma gondolkodásában járatlan számára: ’What are all the manifolds?’ A többértelműség a folytatásban is elénk áll – Osman P.) Persze *nem az a cél, hogy mindet összeszámoljuk, felsoroljuk, hanem hogy megtaláljuk, elnevezzük, és fajtáik szerint csoportosítsuk őket. Hogy legyen egy útmutatónk, amely az összes lehetséges sokasághoz elvezet*. (’A field guide of all possible manifolds’ – ami vajon darabra összeset, vagy az összes fajtát jelenti? Lássuk, mi lesz ebből! – Osman P.)

Kezdjük azzal, hogy *mit is értünk pontosan sokaságon*. Ahhoz hogy valamit sokaságnak nevezhessünk, elég *szigorú követelménynek kell megfelelnie, és a legtöbb alakzatnak ez nem is jön össze*. Új szabály: A ’sokaságnak’ nevezett alakzatnak *nincsenek kitüntetett pontjai*: nincsenek végpontjai, kereszteződési pontjai, nincsenek perempontjai, nincsenek elágazódási pontjai. *A sokaság mindenütt ugyanolyan.* (A ’perempont’ nem világos, pontos idevágó jelentését Beckman sem adja meg, s pár próbálkozásra még a google sem segít. Ebből mindjárt némi baj lesz – Osman P.)

Ez a definíció az előző fejezetben bemutatott alakzatok végtelen családjait eleve kirekeszti. Hiszen bármi, ami keresztre, csillagra, vagy ilyesmire hasonlít, nem lehet sokaság. Tehát lehet, hogy a ’hányféle’ kérdésünkre most már igazi választ kapunk: *elképzelhető, hogy pontosan megadható, véges számú sokaság létezik*. Majd kiderül. Ez a definíció nem csak azokat a lapos, drótvázszerű alakzatokat foglalja magában, amelyekkel eddig dolgoztunk. Ugyanis *lapszerű anyagokból vagy tésztaszerű anyagokból is létrehozhatunk sokaságokat*. A világegyetem, amelyben élünk, valószínűleg háromdimenziós sokaság, hacsak úgy nem gondolod, hogy van valahol egy fizikai határa, ahol véget ér, vagy keresztezi önmagát.

Maradjunk még a drótvázszerű alakzatoknál, amelyeket zsinegből el lehet készíteni. A topológiában ezeket *egydimenziós*nak nevezzük, jóllehet maga a lap, amit kihajtogatunk, már kétdimenziós. De *itt az alakzat anyaga, ami számít*. Lássuk tehát, milyen sokaságokat tudunk drótból elkészíteni! A csavarok, hurkok, ívek még csak-csak, hiszen azokat ki lehet egyenesíteni. Az igazi gond a végpontokkal van. Hogyan tudnánk megszabadulni a végpontoktól? Nos, *ilyen drót-sokaságból mindössze kétféle létezik*: a kör (másik nevén S1) és a végtelen vonal (R1) létezik. A végpontoktól kétféleképpen szabadulhatunk meg: vagy össze kell kapcsolni a két végpontot, létrehozva egy hurkot, vagy végtelen hosszúra kell nyújtani a drótot. *A topológiában minden alakzat nyújtható, ez a kettő lefedi bármelyik zárt hurokalakzatot és bármelyik végtelen hosszú alakzatot*. Vagyis nem kell szó szerint körnek vagy geometriai értelemben egyenesnek lennie.

Két dimenzióban már olyan sokaságokat keresünk, amelyek *lapszerű anyagból* állnak. *Mindig az számít, hogy miből rakjuk össze a sokaságot!* A legtöbb ilyen alakzatot normál esetben háromdimenziósnak neveznéd, de ettől még kétdimenziós lapokból készülnek, és ez a lényeg. Milyen sokaságokat tudunk készíteni lapszerű anyagból? Most olyan sokaságokat keresünk, amelyek mindenhol lapszerűek, de nincs se szélük, nincs se sarkuk, ahol a lap véget érne. Emlékszel, mikor azt mondtam, te is egy sokaságon élsz? Nos, a Föld gömb, ami nem más, mint kétdimenziós sokaság." – Erre így kevesen gondolhattak! Mit érdemel az a bűnös, aki így csalja csapdába az olvasóit?

Itt lap-sokaságok következnek, egyszerűbb és egzotikusabb ábrákkal, egyebek közt a tóruszok végtelen családjával, a „valós projektív sík" lapsokaságával, amely „a mi világegyetemünkben nem létezik, soha nem is létezhet, mert a létezéséhez legalább négy dimenzióra van szükség. *Függetlenül az anyagától, minden alakzatnak van egy minimum dimenziószáma, amelyben létezni tud*. Egy sík létezéséhez két dimenzió szükséges. Egy gömbéhez három. A 'valós projektív síkéhoz' pedig négy." Beckman magyarázza, miként igyekezzünk elképzelni a legalábbis nehezen felfogható. Elénk kerül egy Möbius-szalag is: „a valós projektív sík hozza magával a saját végtelen családját, amely mindenféle csavart, számunkra elképzelhetetlen terekből áll". És: „A *következő dimenzióban* a sokaságok tésztaszerű anyagból készülnek, és *a legegyszerűbbet is lehetetlen elképzelni*. Oda tartozik a hipergömb (S3), amelynek metszetei gömbök. Úgyhogy inkább hagyjuk is ezeket. Láthattuk, hogy *a sokaságok osztályozása pillanatok alatt elvezet minden idők legnehezebb, megoldatlan matematikai problémáihoz*."

Azt reméljük, az eddigiekkel sikerült többé-kevésbé érzékeltetni Beckman előadásának gondolkodásmódját és technikáját, s így az olvasó ráérezhet, mire számítson a továbbiakban. A folytatást viszont viszonylag rövidre kell fognunk, hiszen a topológia testeivel ellentétben az ilyen ismertetés nem nyújtható a végtelenségig.

A következő fejezet a Dimenziók. Beckman igen helytállóan vázolja, hogy a topológia fogalmai és logikája bizony gyakran megjelennek a köznapi gondolkodásunkban is. „*Az emberek szeretnek vizuálisan gondolkodni, ezért gyakran vizuális analógiák segítségével próbáljuk az elvontabb fogalmakat megérteni*. A beszélt nyelv is tele van vizuális analógiákkal, amelyeket talán észre sem veszünk, pedig gyakran használjuk őket. Amikor ilyeneket mondunk, a *hétköznapi életünk problémáit tulajdonképpen topológiai problémákra fordítjuk le*.

Gondolj csak a politikára! A politikai ideológia, mint olyan, meglehetősen összetett fogalom, és egyáltalán nem nyilvánvaló, hogyan lehet tömören megragadni a különböző politikai irányzatok közti különbséget. *Hogy egyszerűbb legyen a dolog, általában az ideológiákat egy kétirányú tengelyen szokták ábrázolni*, ahol a progresszív, liberális, egalitárius eszmék kerülnek a bal oldalra, a hagyománytisztelő, konzervatív, libertariánus gondolkodásmód pedig a jobb oldalra.

Az is lehet, hogy *a politikai ideológiákat több dimenzióban kellene leképeznünk*, nem csak egyetlen balra és jobbra mutató tengelyen. Ezek a kérdések nem pusztán arra valók, hogy a kíváncsiságunkat kiéljük. Ugyanis ha valamilyen konkrét, az emberek ideológiai beállítottságával kapcsolatos célunk van – például szeretnénk megjósolni a következő választások eredményét, vagy támogatókat szeretnénk találni valamilyen kezdeményezéshez – akkor *az ideológiai térről alkotott megfelelő modellnek igen nagy hasznát vehetjük*." – S a politika csak egy a stratégiaalkotást és a cselekvést támogató modellezés felhasználásából. Ott van egyebek közt a marketingmunka – Beckman is kitér erre –, és sok más. *A sokaságok osztályozásának így vehetjük tehát hasznát a matematikán kívül.* Elég, ha egyszer megoldjuk az elvont matematikai kérdést, utána, ha vizuális analógiát használunk valaminek az elemzésére, a lista, amely a választható tereket tartalmazza, mindig ugyanaz marad. A legtöbb rendszer, amelyekkel a hétköznapi életünk során találkozunk, remekül leírható alapvető, egyszerű terekkel: vonallal, síkkal esetleg háromdimenziós térrel és így tovább. Ilyenkor, *amikor próbálunk megérteni egy rendszert, a fő topológiai kérdésünk* így hangzik*: 'Hány dimenziója van?'* Ez a kérdés rejlik a felszín alatt számos vitában a legkülönbözőbb tárgyú diskurzusokban. Van egy fogalom. Rendben. És hány dimenziója van?"

Beckman így lép tovább: „Ennek a fejezetnek a hátralevő részében több fogalmi térrel kapcsolatban teszem fel azt a kérdést, hogy vajon hány dimenziója van." Érdekes és fontos felismerésekhez juthatunk.

A következő nagy rész az Analízis. Három fejezete: *A végtelen / A kontinuum / Leképezések.* Kicsit még beléjük pillantgathatunk.

A végtelen: „Amikor az emberek a végtelenről kérdeznek, mindig egyvalamit akarnak tudni: Van valami, ami nagyobb a végtelennél? És erre a kérdésre létezik egy válasz: vagy 'igen', vagy 'nem', és a fejezet végére el is árulom, hogy melyik. Persze most is megpróbálhatod kitalálni, de szerintem jobb, ha előbb rögzítjük a játékszabályokat, csak *hogy biztosan ugyanarról beszéljünk*. (Tessék erre felfigyelni, mert kritikus jelentőségű! A világon – kevés kivétellel – alighanem semmi sincs, ami olyan egyértelmű lenne, hogy mindenki pontosan ugyanúgy érti. Remek példa a 'sokaság': mennyivel mást jelent itt, mint a közbeszédben, s mennyire mást egy kisvárosról szólva, mint egy igen nagyról. Ha nem biztosítjuk előre, hogy ugyanarról szólunk, könnyen elbeszélhetünk egymás mellett – Osman P.) Kezdjük mindjárt azzal, hogy mit jelent a 'nagyobb'. *Honnan fogod biztosan tudni, hogy sikerült találnunk valamit, ami nagyobb a végtelennél?* Jobb, ha először is lefektetünk egy tuti biztos szabályt annak eldöntésére, hogy egy mennyiség 'nagyobb-e' egy másiknál." – Beckman ehhez igen jó magyarázatot fűz – ami nem csak ebben segít, hanem jól használható, sőt extrapolálható gondolkodásmódot ad hasonló jellegű feladatok megoldásához is.

A folytatásban a végtelennel való műveletek köznapi egyszerűséggel előadott példái következnek, majd *„[h]a tényleg a végtelennel akarunk foglalkozni, jobb, ha nem hallgatunk az intu*íciónkra. Ugyanis folyton az intuíciónak ellentmondó nagyon furcsa eredményeket kapunk, mint például az előbbi is volt, vagyis hogy a végtelen az ugyanakkora, mint önmaga kétszerese. A matematikusok is épp az ilyen bizonyítások miatt utasították el oly sokáig, hogy a végtelennel dolgozzanak, és még ma is rengeteg matektanár vallja, hogy a végtelenről nem tudunk gondolkodni, az nem igazi matematika. *Pedig az igazi matematikának épp ez a lényege: bármiről tudunk gondolkodni, csak az a fontos, hogy előre lefektessük a játékszabályokat*. A végtelennel is lehet dolgozni, ha tisztában vagy vele, hogy pontosan mit jelent, és hajlandó vagy elfogadni, hogy adott esetben bizarr eredményeket kapsz."

A végtelenségig feszítve a kérdést: „Mi van, ha végtelenszer vesszük a végtelent? Végtelenszer végtelen! Ez már lehet nagyobb a ’sima’ végtelennél? Vajon ezt is össze tudjuk párosítani egyetlen végtelen zsák tartalmával? Megmondom: igen! Ez még mindig ugyanakkora. Íme a bizonyítás, ezúttal rajzban."

S a csattanó: a kontinuum! „Most pedig, ahogy ígértem, megmondom a választ a nagy kérdésre. *Igenis van valami, ami nagyobb a végtelennél. Kontinuumnak hívják*. A kontinuum ugyanannyival nagyobb a végtelennél, amennyivel a végtelen nagyobb az egynél. *Felfoghatatlanul nagyobb*. Egyszerűen az már *másféle nagyság*. A kontinuum olyan nagy, hogy a végtelent össze se tudjuk hasonlítani vele. Úgy is nevezik, hogy ’*folyamatos* végtelen’, ellentétben az előző fejezetben megismert végtelennel, amelyet olyan zsákként képzeltünk el, amelyben különféle tárgyak vannak. Azt a végtelent ’*megszámlálható végtelennek*’ hívjuk, mégpedig azért, mert minden egyes elemére rámutathatsz, és szép sorban bepakolhatod őket a zsákba. (Abszurdnak tűnik: megszámlálható, de a végtelenségig számlálva sem érünk a végére. Beckmannak erre is van jól érthető magyarázata – Osman P.) *A kontinuum egy vonal pontjainak a száma*. És még az sem számít, hogy az a vonal véges vagy végtelen hosszú. Itt a szövete számít, a pontok sűrűsége. *Ez egy gazdag, telített, sűrű végtelen*. Bármilyen közelről is nézed, soha nem vékonyodik el – *a legkisebb szeletében is egy teljes kontinuumnyi pontot találsz*.

A megszámlálható végtelent úgy kell elképzelni, mint az egész számok sorozatát: szép sorban egymástól egyforma távolságban lévő pontok egy végtelen hosszú vonalon. De elképzelhetsz egy kétdimenziós hálót is, vagy akár egy háromdimenziós rácsot, sőt akár négy vagy még több dimenziós rácsot is, nem számít, ez akkor sem lesz más, mint egy nagy halom különálló pont. És még ha a pontok közötti távolságot le is szűkíted, mondjuk az eredeti ezred részére, vagy akár milliomod részére, akkor is különálló pontok maradnak, azaz ha elég közel mész hozzájuk, kiválaszthatsz közülük egyet. Ezt értjük megszámlálhatóan végtelen alatt. A kontinuumban viszont a köztes pontokat is tartalmazza. Méghozzá az összeset. *A kontinuum az egymásba olvadó pontok sima tengere. Nem megszámlálható*."

Minden józan észnek ellentmondó állítás következik, két különösen fontos fogalommal: „Más megközelítésben: *ha egy nyilat dobsz a számegyenesre, annak esélye, hogy egész számot találsz el, pontosan nulla. Nem nagyon kicsi, hanem nulla*. Ugyanis a számegyenesen két egész szám között végtelenszer több szám van, mint ahány egész szám a teljes számegyenesen." – Namármost, ha azt mondaná az esélyre, hogy végtelen kicsi, az érthető lenne. Ám a nulla érthetetlen, hiszen ha az egész számok ott léteznek, el is lehet találni őket. Ez azonban semmit sem von le az itt következő két fogalom valóságosságából. „*Fontos különbségtétel ez, ami a matematikában is, a való világban is gyakran előjön*: ’*diszkrét*’ vagy ’*folyamatos*’. A dolgok bármilyen diszkrét gyűjteménye vagy véges, vagy megszámlálhatóan végtelen. (Az eddigiekből ez világos, hiszen „dolgok", vagyis önálló ’egyedek’, azokra pedig egyenként rá lehet mutatni. Kristálytiszta, remekül magyarázó dichotómia következik – Osman P.) Ha azt kérded, hány hely van egy végtelen hosszú széksorban, a válasz: végtelen. *Megszámlál-*

hatóan végtelen. Egy pad esetében viszont, akár véges hosszúságú, akár végtelen, a válasz a kérdésre, hogy ’hány helyre lehet leülni a padon?’, a c, azaz a kontinuum. Sőt, *bármely két hely között is egy kontinuumnyi hely van*, függetlenül attól, hogy az eredeti két hely milyen távol esik egymástól."

Az előzőekben mondottak bizonyítása következik, hogy a kontinuum nagyobb, mint a végtelen. Tanulságos végigkövetni. Beckman felveti, *létezik-e egyáltalán a való világban olyasmi, ami annyira sűrű, mint a kontinuum*. Válasza: „világunk is apró részecskékből áll, azaz semmi nem lehet kontinuum sűrűségű, talán csak az idő". – Ha belegondolunk, a végtelen sűrűség azt jelenti, hogy minden eleme végtelenül kicsi – a tudomány állása szerint viszont a természetben semmi sem lehet kisebb a Planck-hossznál. Viszont hasonlóképp az idő is „szemcsés", azaz a lehetséges legrövidebb része a Planck-idő. – L. Carlo Rovelli: A valóság nem olyan, amilyennek látjuk (Park Könyvkiadó, 2019, Iparjogvédelmi és Szerzői Jogi Szemle 2020/2. sz.)

Mégis, hogy hogy nem, *a kontinuum az alapvető aritmetikai műveletektől eltekintve a matematika leghasznosabb területének központi eleme*. A modern természettudományok legtöbbje és a közgazdaságtan is használja azt a matematikai eljárást, amely segítségével össze lehet adni kontinuum mennyiségű számot, és az eredmény mégis egy véges szám. *Ezt a módszert integrálásnak nevezik*, de én itt most kontinuum-összeadásnak fogom hívni, mert valójában erről van szó."

„Nézzük, hogy működik!" – folytatja Beckman, és példák következnek, gyakorlati felhasználások, majd szövegdobozban a bizonyítás. „Azt fogjuk bizonyítani, hogy bárhogyan is próbáljuk összepárosítani a kontinuum elemeit a diszkrét végtelen elemeivel, nem járunk sikerrel, mert a kontinuum oldalán mindig lesz maradék. Vagyis azt fogjuk bizonyítani, hogy a kontinuum pontjait nem lehet felsorolni, erre még egy végtelen hosszú lista sem elegendő."

Most is van felfelé! „Ha elfogadjuk ezt a bizonyítást, akkor kijelenthetjük, hogy van valami, ami nagyobb a végtelennél. Tehát *nem csak véges van és végtelen, hanem felettük van még egy réteg. Ami aztán megint rengeteg kérdést vet fel*. Vajon van valami a végtelen és a kontinuum között, vagy a kontinuum a következő nagyobb dolog? És van valami, ami a kontinuumnál is nagyobb? Hány különböző végtelen van? A végtelenek száma véges, vagy az is végtelen? És ha végtelen…, akkor vajon melyik típusú végtelen? Ezen kérdések közül némelyikre van válaszunk, másokra nincs. De mint kiderült, az első kérdés (azaz, hogy van-e bármi a végtelen és a kontinuum között), mind közül a legfurcsább. Mert nagyon úgy néz ki, hogy ez egy eldöntendő kérdés, amelyre a válasz vagy igen, vagy nem. De valaki talált egy olyan választ, amelyet be is bizonyított, és az se nem igen, se nem nem. Kevéssé ismert tény, de *van egy harmadik lehetőség az igaz és a hamis között*. De erről majd később."

A következő fejezet a *Leképezések*. Már találkoztunk is velük, csak nem ilyen néven mutatták be.

Sajnos az ilyen írás nem kontinuum, minden nem fér bele, így ebből csak két érdekes tételt ragadunk itt ki. „*Minden zárt tartályon belül áramló közegben létezik egy fix pont*, vagyis egy olyan pont, amelyik nem mozog. Ezt a tényt nevezik 'fixpont-tételnek', amelyet minden dimenzióban sikerült bebizonyítani." És „*[e]gy szőrös labdát nem lehet tökéletesen simára fésülni*. Ez a tény pedig nem csak a szőrös labdára igaz, hanem minden olyan esetben, amikor egy gömbfelület minden pontjához irányt akarsz rendelni. A Föld felszínén mindig van legalább egyetlen pont, ahol épp semelyik irányba nem fúj a szél. Az óceánokban is vannak szingularitások, ahol nem áramlik a víz, ezeken a helyeken gyűlik össze a tengerekbe dobált rengeteg szemét, és ott hatalmas forgó szigeteket alkot. De ez csak a gömbfelületeken igaz. Egy szőrös tóruszt minden további nélkül tökéletesen simára lehet fésülni."

A következő nagy rész: *Algebra*, fejezetei: *Absztrakció / Struktúrák / Következtetés.*

Absztrakció: „Kezdjük a legelején. A matematika tiszta, elvont objektumokkal foglalkozik, amelyeket egy üres térben képzelünk el. Az algebra – na, az aztán a legtisztább, legelvontabb valami mind közül. Most nem arról az algebráról beszélek, amit az iskolában tanultál. Amiről ebben a fejezetben mesélni akarok, az az úgynevezett '*absztrakt algebra*'. Ez annyira elvont, hogy még csak nem is valamilyen konkrét objektumtípusról szól. Hanem arról a gondolatról magáról, hogy egyáltalán léteznek objektumok és az objektumok között léteznek relációk."

„*Az absztrakt algebra magának az algebrának egy általánosabb verzióját keresi*. Megvizsgáljuk a különböző műveleteket – nemcsak a négy alapműveletet, hanem egészen furcsákat is, amelyeket még soha nem használt senki –, és *azt vizsgáljuk, találunk-e magasabb szintű összefüggéseket*. És aztán *a dolog még rosszabb lesz: teljesen elvonatkoztatunk a számoktól is, vagyis ismeretlen objektumokon végzett ismeretlen műveletek eredményeiről gondolkodunk. Erről a fajta algebráról még beszélni is nehéz,* mert egyszerűen nincs semmi konkrétum, amiről beszélni lehetne. Az algebra művelői bizonyos folyamatokat hajtanak végre, bizonyos módokon mozgatnak szimbólumokat a papíron, így bizonyos állításokból más állítások lesznek. De egyik állítás sem jelent semmit, legalábbis a konkrétumok szintjén nem. Minden szimbólum csak egy általános valami, aminek a helyére végtelen sok dolgot behelyettesíthetünk. Tehát úgy is fogalmazhatunk, hogy mindegyik állítás sok millió dolgot jelent egyszerre."

Úgy véljük, ez az a pont, ahol nézelődésünket e matematikai csodák palotájában abba kell hagynunk. Már csak az jöhet, hogy a részek és a fejezeteik címeivel és pár szóval megmutatjuk, mi van még hátra.

Struktúrák: „A teljesség igénye nélkül bemutatok néhányat az algebrai struktúrák közül. Azokat válogattam ki, amelyek gyakrabban fordulnak elő a való életben."

Következtetés: „Minden rendszernek megvannak a saját következtetési szabályai, amelyek a rendszer konkrét tudásstruktúráját tükrözik. Az algebra nagyrészt – az absztrakt algebra és az iskolai algebra is – szigorú következtetési szabályok körültekintő alkalmazására épül."

Újabb nagy rész: *Az alapok – egy dialógus*: „Emlékszel, amikor azt mondtam, hogy létezik egy kevésbé ismert harmadik igazságérték az igaz és a hamis között? Azt hiszem, itt az idő, hogy erről is meséljek egy kicsit", és felettébb élvezetes gondolatmenetek következnek, sok meglepő fordulattal és csavarral.

Utolsó rész: *Modellezés*, fejezetei: *Modellek / Automaták / Tudomány.*

Modellek: „*Ez az alkalmazott matematika világa*. Eddig átnéztük a tiszta matematika három fő ágát, és hozzávettünk még egy csipetnyi történelmet és filozófiát. *A* hátralevő részt a tiszta és alkalmazott matematika viszonyának szentelem, és elmesélek néhány dolgot az alkalmazott matematikáról.

Ez a rész *konkrétan a modellezésről szól. A modellezés alatt itt a matematika és a való világ összekapcsolását értem*. Persze, tudom, hogy a matematika azért számtalan egyéb formában is felbukkan a hétköznapokban, de *a modellezés az az általános keretrendszer*, amely mindezen kapcsolatokat tisztán feltárja előttünk. Segítségével kényelmesen tudunk beszélni a relációkról, így tüzetesen megvizsgálhatjuk őket, és új dolgokat tanulhatunk." S szellemileg felajzó zárszava ehhez: „Lehet, hogy azért találunk lépten-nyomon matematikai mintázatokat a természetben, mert a világ matematikából készült. Lehet, hogy az egész világegyetem alapvetően matematikai természetű, és mégiscsak létezik Egy Igazi Modell, amely tökéletesen leírja a működését. Mit szépítsük? Ez őrültségnek hangzik. De várd ki a végét!"

Arra már nincs helyünk. Tessék elolvasni! Az egészet! Nagyon megéri!

Dr. Osman Péter