

Mosóczi András: *A gondolkodás forradalma. Hogyan alakítja a matematika a világot?*
 Typotex, 2020; ISBN: 9789634930877

Előhang # 1: „A legjobb módszer arra, hogyan jósoljuk meg a jövőt, az, ha mi találjuk föl.” Ez a mondás – melyet azóta már sokaknak, köztük Steve Jobsnak is tulajdonítottak – eredetileg Alan Kaytól származik. És ha valaki, akkor Alan Kay valóban feltalálta a jövőt, amikor a 60-as években kitalált valamit, amit ma úgy hívunk, hogy okostelefon.” (Idézetek a könyvből, kiemelések a recenzió szerzőjétől.) *Okostelefon* – Feltalálni a jövőt: alighanem az emberré válás egyik meghatározó tényezője volt, amikor az ember elkezdte tudatosan alakítani az eszközeit, velük az életmódját, majd már a környezetét is. Talán onnan kezdve, hogy tudatosan használni kezdte a tűzgyújtás technikáját, vagy épp a pattintásos köeszközök készítését, minden ilyen új készséggel apróbb-nagyobb technikai forradalmat indított, s vele új jövőt nyitott, s csak a „tudomány” akkori állásához mérve jogos megítélni, mi tekinthető az adott kor okostelefonnal összemérhető előrelépésének. Talán így érdemes néznünk azt a fejlődést is, amelyet a szerző így jellemez: „A holdra szállás segít megérteni azt, hogy itt valami elképesztően nagy változás történt a technika fejlődésében néhány száz év leforgása alatt. Egy olyan ugrás, melyhez képest minden addigi csak bátortalan lépésnek tűnik.” A technika fejlődése valóban elképesztő, merthogy meredeken exponenciális – de ne nézzük le, mert jogtalan lenne, a „minden addigit”!

„Azok a szerencsés kiválasztottak, akik képesek rá, hogy a semmiből megteremtsek a jövőt, általában valamilyen mérnökök, az a nyelv pedig, amelyen a jövő terveit szövik, a matematika” – folytatja Mosóczi. Persze, aki becsüli a mérnököket, rossz ember nem lehet, a folytatás azonban kissé túlzó, legalábbis a közelmúltig nézve a nagy előrelépéseket. Steve Jobs, Jeff Bezos (Amazon), Richard Branson (Virgin) és mások új rendszer- és termékkonceptciókkal teremtettek új világokat. A „kék óceánokat” (W. Chan Kim & Renée Mauborgne: *Kék óceán stratégia – A verseny nélküli piaci tér*, Park Könyvkiadó, 2008, Iparjogvédelmi és Szerzői Jogi Szemle 2008/4. sz.) is többnyire így tervezik; ugyanakkor a modern tudományok új eredményeinek nagy hányadát valóban a matematika eszköztárával hozzák létre, s egyre inkább ezek adják a modern technológiákat is.

Előhang # 2: „Az emberiség története során minden jelentős felfedezéshez két dolog kellett. Egy kísérletező kedvű tudós, aki csak úgy saját szórakoztatására kitalált furá dolgokat, és egy erős társadalmi vagy uralkodói igény valamely fontosnak ítélt probléma megoldására. Azok a pillanatok jelentették a fejlődés nagy lépcsőfokait, amikor ez a kettő találkozott.” Sok vita folyt már le arról, hogy az „ötlet”, a felfedezés, a találmány csupán egyik lehetséges kiindulópontja a jelentős újdonság létrehozásának, s indítóként legalább akkora szerepe lehet a gazdaságilag jól kiaknázható igény vagy a megteremthető lehetőség felismerésének. Steve Jobs azzal indított széles körben kibontakozó forradalmat, hogy elhatározta és kierőltette, milyeneknek kell lenniük az új számítógépeknek és informatikai eszközöknek. Amióta pedig gazdasági érdekek és megfontolások uralják a világot, leginkább az kell, hogy erős

érdekek álljanak a felfedezés – szintűgy az új találmány – mellé. Ám ha már matematikáról beszélünk, annak fejlődésében a „kísérletező kedvű tudós” tétele részben megáll. Amint Mosóczi is vázolja, a matematika létrejöttének és fejlődésének kezdeteit nagyon is gyakorlatias indítékok vitték előre, ám a „régii görögökkel” eljött egy aranykor, amelyben emberek csak magáért a megismerés, a tudás kedvéért fejlesztették e tudományt. Szerencsére a matematika önzetlen kutatásának, művelésének szép szokása a továbbiakban is fennmaradt, s hatalmas építményének nagy részét a közelmúltig így hozták létre. Igaz, ebben meghatározó szerepe van egy különleges tulajdonságának: a modern számítástechnika bekapcsolásáig a műveléséhez elegendő volt a papír, íróeszköz és lehetőleg hasonló érdeklődésű levelezőpartnerek, akikkel meg lehetett osztani, és főként megvitatni, ellenőrizni az felismeréseket, új eredményeket, módszereket.

„*A gondolkodás forradalma*”: Vitathatatlan, hogy ma – még sokkal inkább, mint korábban – egy könyv címének „blikkfangosnak” kell lennie, azaz megragadnia a tekintetet és a figyelmet, másként elsikkad a kínálat özönében. A cím valószínűleg ennek jegyében született. A könyv tényleges mondandója viszont leginkább a következőképp összegeezhető (ami azonban sokkal nehezekebb): *hogyan segíti a matematika a technológiák exponenciálisan gyorsuló forradalmát*. Alcímként: válogatott bepillantások a matematika fejlődésének és a technológiákkal való szimbiózisának történetébe.

Erről szól a könyv: „Mi történhetett az elmúlt pár száz évben, ami ezt a hihetetlenül nagy fejlődést okozta? Ahhoz, hogy megérthessük, mi is történt itt pár száz évvel ezelőtt, és mi köze ennek a matematikához, hosszú és kalandokban gazdag, izgalmas út vezet. Induljunk el ezen az úton, és fedezzük föl együtt az emberiség fejlődésének titkát!” S ha „az emberiség fejlődésének titkát” nem is kapjuk meg, egy megkapó válogatást a matematika- és a ráépülő technikatörténetből igen.

A szerzőről: Viszonylag kevesektől eltekintve, akiket velük született tehetséggel vagy igazán jó matematikatanárokkal áldott meg a sors, a matematika a legtöbbünknek ó, jaj, „fenség, Észak-fok, titok, idegenség, lidérces, messze fény” (Ady Endre: Szeretném, ha szeretnének), s ezért meghatározó jelentőségű, ki a túravezetőnk. *Mosóczi* a *Typotex* így mutatja be: „Hazánk egyik legnépszerűbb matematikaoktató weboldalának alapítója. Írásaiban, előadásaiban és oktatóanyagaiban *hihetetlenül laza, mégis precíz stílusban mutatja be a matematika világát. Közel 20 éve foglalkozik egyetemisták és főiskolások oktatásával, számos egyetemen, a BME-től az ELTE-n át a Budapesti Gazdasági Egyetemig. A megszerzett tapasztalatokat és tudást 2010-ben kezdte el online oktatóanyagokba sűriteni, olyan epizódokba és videókba, ahol a világos és egyszerű magyarázatok közvetlen és humoros stílusban, bárki számára érthetővé teszik a matematikát. Jelenleg a több mint 120 ezer felhasználóval rendelkező *matetking.hu* oldal vezetője.*”

A Typotex ajánlójából, amely a könyv fejtegetéseiből ragad ki néhányat: „Lehet-e még hely a végtelen szállodában, ha minden szoba foglalt? Hogyan viselkednek a skizofrén nullák? Mi történt Steve Jobs garázsában? Miféle egyenletek működtetik a világot? Mi a különbség a Notre Dame és egy nanoúrhajó között? Van-e közös vonás Newton fluxióelméletében és a Mona Lisában? A matematika olyan absztrakt fogalmakkal kapcsolatban mond ki örök érvényű igazságokat, amelyek nélkül sosem tudtunk volna választ találni számos gyakorlati kérdésre. Hogyan mérhetnénk precízen az időt, miképpen építhetnénk biztonságos függőhidat, hogyan juthatnánk el a Holdra? A könnyed, világos stílusban megírt könyv érdekes paradoxonokon, fontos tudományos felfedezéseken és izgalmas problémákon keresztül világítja meg: az emberiség története szétválaszthatatlanul összefonódik a matematikával.” – Néhány kisebb slamposság ugyan akad benne, de ez semmit sem von le a matematika világába tekintést nyújtó értékéből.

Mosóczi a gondolkodás forradalmáról és hozzá a matematikáról: „Jelenleg egy újabb ipari forradalom zajlik körülöttünk. Az első ipari forradalom az 1800-as években az erő forradalma volt. A fizikai erővel elvégezhető munkákat szép lassan kiváltották a gépek. Megjelentek az első gőzgépek, a szövő- és fonógépek, a nyomdagépek (igazából a szövő- és fonógép a 18. sz. ipari forradalmának gyümölcse, James Watt 1769-ben szabadalmaztatta javított gőzgépet, s a Johannes Gutenberg-féle nyomdaprés volt az első európai nyomdagép – Osman P.), a vonat... Emberek millióinak a munkája vált néhány év leforgása alatt feleslegessé. Az a forradalom, amely most körülöttünk zajlik, egy másik forradalom, a gondolkodás forradalma. A nem is olyan távoli jövőben nagyon sok területen robotok fognak dolgozni helyettünk: önvezető autók, automata pénztárak, önmagukat javító gépek. És bizony sok-sok millió hagyományos munkahely fog egyik pillanatról a másikra megszűnni. Minden olyan munkát, amihez csak mechanikus gondolkodásra van szükség, a gépek fognak elvégezni. Azok a foglalkozások maradnak meg továbbra is nélkülözhetetlenek, amelyek innovációt, szellemi hozzáadott értéket, valódi gondolkodást igényelnek. Ehhez pedig a jó problémamegoldó készség, a kreativitás és a logikus gondolkodás alapvető fontosságú. Sok olyan dolog van a világon, amely segít nekünk abban, hogy fejlesszük ezeket a képességeinket, de van valami, ami mind közül a leginkább alkalmas erre a célra. Ez pedig nem más, mint a matematika.”

Néhány karakteres mondat

„A számfogalom kialakulása, úgy tűnik, elsősorban két dologhoz köthető. Az egyik az idő múlásának és ciklikusságának kimutatására alkalmas órák és naptárak készítése, a másik pedig a különböző javak nyilvántartása. És ez utóbbi vezetett el minden jel szerint a mennyiségeket leíró számjegyek feltalálásához és az absztrakt számfogalom megszületéséhez is.” – Szinte hihetetlen, de Mosóczi említ egy amazóniai népcsoportot, amely „nem ismeri a számokat. A számolásra vonatkozóan mindössze négy szavuk van: az egy, a kettő, a néhány és a sok. A kutatások kimutatták, hogy a törzs teljesen normálisan működő, komoly vadá-

szati stratégiák kialakítására képes népcsoport, mindössze arról van szó, hogy *nincs igényük arra, hogy komolyabb számításokat végezzenek.*”

A matematika születése: A könyv bemutat egy ősi sumér számviteli technikát, amely előbb agyagedénybe tett golyókkal, később már az azokat helyettesítő, az edény felületére vésett jelekkel dolgozott. „Ezzel pedig eljutottak oda, hogy már csak a kecskék számának megfelelő számjegyet vésték bele egy agyagtáblába. Így született meg a sumer kultúrában a számjegyek absztrakt leírása. És ezzel vette kezdetét a matematika. Ez az absztrakció kellett ugyanis ahhoz, hogy eljuthassunk olyan műveletekhez, mint a szorzás vagy a négyzetre emelés. Az egyszerű rovásokat használó ember valószínűleg sosem gondolkodott volna el azon, hogy mennyit kap, ha a IIIIIIIIIIIIIIII számot négyzetre emeli. A sumerok azonban eljutottak idáig, sőt még ennél sokkal tovább.”

„Az első igazi írásos emlékek adóbevallások és árnyilvántartások voltak.” – Ez is arra utal, hogy Ádámék ették volna meg inkább a kígyót!

Ősi babiloni számítástechnika: „A Columbia Egyetem gyűjteményében őrzött Plimpton 322 nevű babiloni agyagtáblát közelítőleg 1800 évvel időszámításunk előtt készítették, és a rajta látható táblázatok pitagoraszai számhármassokot tartalmaznak. *Vagyis a Pitagorasz-tételt ismerték már több mint 1000 évvel Püthagorasz születése előtt.* Előkerültek olyan táblák is, amelyekben a számok négyzeteit vagy köbeit tartalmazó listák szerepelnek, vannak terület és térfogat kiszámítására vonatkozó táblák, de találtak egyszerű szorzó- és osztótáblákat is. A babilóniaiak ismertek meglepően sok geometriai összefüggést is, például a hasonló háromszögek területeinek arányát vagy éppen az egységnyi hosszúságú négyzet átlójának hosszát. Egy 2017-es tanulmány szerint pedig a Plimpton 322 tábla a pitagoraszai számhármassokon kívül trigonometrikus értékeket, a szinuszhoz és koszinuszhoz hasonló mennyiségeket is tartalmazott. *A babilóniaiak ezeket a matematikai ismereteiket civilizációjuk fejlesztésére használták, főként a bonyolultabb építkezésekhez, naptárakhoz, napórákhoz vagy éppen csillagászati méréseikhez.*” – Ő-Egyiptomban a Nílus áradásának előrejelzésére fejlesztették matematikai tudásukat.

Intellektuális szórakozásként is: „Néhány [Babilonból] fennmaradt táblán olyan matematikai problémák is vannak, melyeket úgy tűnik, mintha csak *puszta szórakozásból* fogalmaztak volna meg.”

Papír és ceruza: Az ókori, sőt a középkori építmények legkiemelkedőbbjeit elnézve döbbenetes, hogy azokat matematikai számítások nélkül tudták létrehozni – gondoljunk pl. a nagy gótikus katedrálisokra. Hasonló teljesítmény volt a hajóépítés legjava is. „A gótikus katedrálisok igazi mérnöki mesterművek, és szépségükből semmit sem von le az a tény, hogy építésük során bizony gyakran kellett rögtönözni, amikor az éppen leomló falakat más elképzelés mentén újraépítették, és az is megesett, hogy egy templomot sosem fejeztek be, mert egyszerűen nem tudták továbbépíteni. Egy kőhíd nagy nehezen felépülhetett úgy, hogy addig-addig próbálkoztak, míg végül sikerült elkészülni vele, de az *emberiség történe-*

tében hatalmas fordulópontot hozott az, amikor már nem kellett egy hajót megépíteni ahhoz, hogy kiderüljön, felborul-e, hanem elegendő volt hozzá egy papír és egy ceruza, meg persze sok-sok számítás elvégzése. Hirtelen képessé váltunk megjósolni a jövőt. Mindehhez pedig a matematika segítette hozzá az emberiséget.”

„A racionális számok bármely két egész szám közt végtelen sokan vannak, sőt bármely két racionális szám között is végtelen sokan vannak.” – Elérkeztünk a sűrűjébe.

„Azt, hogy mit is tekintünk fraktálnak, minél többet tudunk róluk, annál nehezebb megmondani.” – Némi vigasz azoknak, akik nem értik a tökéletesen önhasonló, a végtelenségig iterálható alakzatok mibenlétét.

„Azt a keskeny tartományt, ahol már kellően kis szögben érkezik az űrhajó ahhoz, hogy ne égjen el, de még nem is túl kicsi szögben ahhoz, hogy a légkört elérve lepattanjon róla, belépési folyosónak nevezik.” – Azt a személyt pedig, aki ezt képes volt modern számítás-technika nélkül megbízhatóan kiszámítani, létfontosságúnak az akkori űrprogramban.

Egy praktikus megjegyzés: A könyv tele van matematikai fogalmakkal, alkalmazásokkal, sok matematikus neve is megjelenik benne, így kézikönyvként is jó szolgálatot tehet. Ehhez nagyon hasznos lenne a visszakeresés lehetősége. Sajnos név- és tárgymutató nincs benne. Ezért az olvasás közbeni megértést is célszerű lehet jegyzeteléssel segítenie annak, aki nem bízik benne, hogy minden fogalomra, magyarázatra, vagy annak helyére emlékezni fog.

Kissé alaposabb belenézés

A híres-nevezetes pillangóhatásról és az időjárás-előrejelzésről: „1904-ben publikálta híressé vált cikkében Vilhelm Bjerknes norvég fizikus-matematikus azt az öt parciális differenciálegyenletet, amelyek a légköri folyamatok rendszerét írják le. Az általa megalkotott és máig használt parciális differenciálegyenlet-rendszer hagyományos eszközökkel nem megoldható, kizárólag számítógépek segítségével. ... A nagy áttörést csak jóval később, egy matematikus látásmóddal megáldott amerikai meteorológus, Edward Norton Lorenz hozta meg. A számítógépek fejlődése lehetővé tette számára, hogy 1960-ra elkészítse bolygónk meteorológiai rendszerének egy végtelenül leegyszerűsített modelljét. Lorenz betáplálta a számítógépbe egy adott nap mérési adatait (hőmérséklet, légnyomás, nedvességtartalom, szélereősség stb.), és a kapott adatokból a modell megjósolta a várható időjárást. Felfigyelt azonban egy érdekes jelenségre. Amikor 1960-ban elkészítette első kezdetleges meteorológiai modelljét, az egészen megbízhatónak bizonyult, mígnem egy több napra kiterjedő és roppant időigényes számítást úgy próbált meg lerövidíteni, hogy a gép által egy adott napra már korábban kiszámított értékeket saját feljegyzései alapján kézzel táplálta be, megspórolva ezzel azt, hogy a gépnek kelljen újra kiszámítania azokat. Az eredmény láttán először arra gondolt, hogy elromlott a gép, ugyanis teljesen más eredményeket kapott, mint korábban. Elkezdte hát kutatni a hiba okát. A gépet úgy alkotta meg, hogy számításait hat tizedesjegy pontossággal végezze, ám a végeredményt csak négy tizedesjegy pontosan írja ki. *Amikor*

kézzel táplálta vissza a négy tizedesjegy pontosságú adatokat, úgy gondolta, hogy ez a picike pontatlanság nem lesz jelentős hatással a teljes számolás végeredményére. Mint utóbb kiderült, ez az eltérés drámaian nagy hatással volt a végeredményre, [azaz] a meteorológiai modellek nagyon érzékenyek a kezdeti értékek apró változásaira. Ezt a Lorenz által felfedezett jelenséget azóta pillangóhatásnak nevezték el, arra utalva, hogy egy parányi pillangó szárnycsapásai is képesek előidézni a kezdeti adatokban olyan apró változásokat, amelyek aztán drasztikusan megváltoztathatják a modell lefutását és így a kapott végeredményt.” – Könnyű itt meglátni a párhuzamot a politikai vagy egyéb társadalmi „időjárás-előrejelzéssel”. Pontos műszaki kifejezéssel a légköri folyamatok *pokolian* összetett és bonyolult rendszert alkotnak, s a rengeteg tényező megfelelő figyelembevétele teszi roppant nehézé az előrejelzést. Egy nagyobb közösség alighanem hasonlóképp összetett és bonyolult rendszer, ezért a jövőbeni politikai vagy egyéb társadalmi véleményének, állásfoglalásának – vagy épp szavazatainak – alakulását hasonlóképp nehéz megbízhatóan előre jelezni, bőséges teret adva a „pillangóhatásoknak” is. Markáns különbség viszont, hogy az utóbbiak erős lehetőségeket adnak a kimenetek alakulásának befolyásolására, olyannyira, hogy mind kifinomultabb technikák is születnek erre. S még egy markáns különbség: Heisenberg óta tudjuk, hogy mikroszinten egy rendszernek a pusztá vizsgálata is befolyásolja annak működését. Ez a légköri folyamatok rendszerére természetesen nem áll, viszont politikai és egyéb társadalmi rendszerek „mikroszintjén”, vagyis az emberek megkérdezésében már nagyon is megjelenhet ilyen hatás. Ismeretes, hogy a kérdés technikája esetenként nagyon is képes befolyásolni a választ.

Sokaságban az erő: *ensemble előrejelzés*. „A pillangóhatás okozta bizonytalanságokat csökkentő módszer neve valószínűségi, másként *ensemble (együttes) előrejelzés*, és az alapötlet nagyon leegyszerűsítve a következő. Hogyha egyszer az okozza a problémát, hogy a rácsponatok kezdeti értékei picit eltérhetnek a valóságostól, akkor *futtassunk le egymással párhuzamosan több modellt, mindegyikben egy picikét változtatva a kezdeti értékeken*, és nézzük meg, mi jön ki. Ha az egymással párhuzamosan lefutó modellek többé-kevésbé ugyanazt az előrejelzést adják, akkor a kapott eredményben kellőképpen megbízhatunk, vagyis jó eséllyel tényleg olyan idő lesz. Ha viszont jelentősen eltérő eredmények születnek, akkor az előrejelzés megbízhatósága kisebb.”

A *technológiai forradalom segít*: „Az ensemble előrejelzések meglehetősen pazarlóan bálnak a számítási kapacitásokkal, hiszen egyetlen előrejelzés elkészítéséhez 20-szor vagy akár 50-szer is le kell futtatni az adott modellt. Egy olyan modellt, amely például Európán belül jelenleg már 8 km-es felbontással, 49 függőleges szinttel és körülbelül 5 millió rácspon összes adatával fut. 1960-ban Lorenz nem is álmodhatott ilyesmiről, az akkori számítási kapacitásokkal *egy ilyen modell egyetlen lefutása a világ összes számítógépét felhasználva is lényegesen lassabb lett volna, mint ténylegesen kívárni és megnézni, hogy milyen idő is lesz másnap valójában*. Az Intel egyik alapítója, Gordon Moore által megfogalmazott és azóta Moore-törvényként elhíresült állítás szerint azonban a világ számítógépeinek számítási ka-

pacitása 18 havonta megduplázódik, így *mostanra lehetségessé vált olyan modellek futtatása is, amelyek viszonylag jó pontossággal havi, sőt féléves előrejelzéseket is képesek készíteni.* – Természetesen itt a Moore-állítás *beteljesülése* hozta a megoldást.

Ha a rendszer kiszökik a modell alól: „Az utóbbi években azonban a folyamatosan növekvő számítási kapacitások ellenére is csökkenni kezdett a modellek megbízhatósága. Ennek oka az, hogy *a globális felmelegedés hatására a légkörben zajló folyamatok változásnak indulnak. A jól bejáratott modellek pedig nem tudnak megfelelően lépést tartani ezekkel a változásokkal.* Ha már egy pillangó szárnycsapkodása is komoly hatással van a modell futására és ezáltal a kapott végeredményre, akkor képzelhetjük, milyen elképesztően nagy változásokat tud okozni például egy városnyi méretű leszakadó jégtábla. A modellek fejlesztése egyszerűen nem képes lépést tartani az egyre gyorsabban változó klímával, és örült versenyfutás zajlik, hogy legalább részben megőrizhető legyen az előrejelzés megszokott pontossága.”

Redundáns nyelv: Némi elemzés gyakran ejti csodálkozásba az embert afölött, hogy mennyi célszerűség rejlik a legkülönbözőbb dolgainkban. Jelen esetben a nyelvünkben. Bár a fogalmat nem használja, Mosóczy megmutatja, hogy szavaink többnyire erősen redundánsak, vagyis többszörösen is tartalmazzák ugyanazt az információt. Bizonyos szótárszerkesztők szerint ugyan a redundáns = „terjengős, fölösleges részletekben bővelkedő”, a nyelv esetében azonban ez nagyon nincs így, a redundancia az információközlés biztonságos működését szolgálja. Mosóczy jól ismert típusú példát hoz erre: „A margya nyelvi szavianak száma lényegesen kevesebb, mint amilyen hosszaük a saavk. Sőt, valójában a bedúk is kicsevékelhetőek. És ezáltal még több lehgeőség van.” A lényeg világos: „Ez a kis példa azt mutatta be, hogy *mekkora biztonsági tartalék van a szavak megalkotásában.* Még akkor is nagyobb nehézségek nélkül olvasható marad a szöveg, ha a benne szereplő szavakban több betűt fölcserélünk, vagy akár más betűre cserélünk.” – Ez azért fontos, mert a szöveg jelentése – információtartalma – akkor is nagyjában-egészében csorbítatlan marad, ha az elemeknek egy része valamely okból torzul.

„Már hat betűből is 216 millió szó alkotható, ami nemcsak a magyar nyelvhez, hanem a világ összes nyelvéhez elegendő lenne. *A hat betűnél hosszabb szavak tehát így első ránézésre teljesen feleslegesek.*” A tétel ugyan első ránézésre sem életszerű, hiszen a nyelvben megjelenő betűkombinációknak kiejthető szavakat kell alkotniuk, s ezért sokuk kiesik, ám valóban sokkal rövidebb szavak is képesek lennének megjeleníteni a nyelvet – biztonsági tartalék nélkül. Hogy az utóbbi mit jelent, arra a legkézenfekvőbb példát a számok szolgáltatják. Bármely számrendszerben, ha egy szám valamelyik számjegye megváltozik, külső segítség nélkül lehetetlen megállapítani, mi is volt az eredeti. Ezért van az, hogy a biztonságot, amelyet az embereknek a törzsfeljődés ilyen ragyogóan összehozott a nyelvhasználatban, az embernek az adatátvitelben magának kell létrehoznia bonyolult technikák segítségével. Erre szolgálnak az adatátviteli biztonsági rendszerek, pl. hibafelfedő kódolási megoldások, „önjavító kódok”, „hibajelző bankszámlaszámok” – a továbbiakban kapunk ebbe is betekintést.

Biztonságos szavak: „A szavak értelmetlenné tünő hosszúságára adhatunk különböző költői magyarázatokat, amelyek a nyelv szépségét vagy éppen leleményességét emelik ki, és természetesen ezek mind fontos szempontok. *De létezik egy nagyon egyszerű matematikai ok arra, hogy miért előnyösebbek a hosszabb szavak. Ha ugyanis túl rövidek lennének a szavak, akkor könnyebben össze lehetne őket téveszteni, és így kevésbé lennének alkalmasak a biztonságos kommunikációra.*”

„A szavak biztonságos hossza egy matematikai kérdés, amely nem is olyan régen vetődött föl először. Egy egészen új tudományág, az információelmélet kezdett el foglalkozni vele valamikor az 1900-as évek közepe táján. *Nézzük meg, mi is az az információelmélet, és mit jelent egyáltalán az információ fogalma.*” A magyarázat pedig az információelméleten keresztül korunk egyik legnagyobb jelentőségű területére visz, amelyen a matematika és a modern technológia kölcsönhatásban csinálják a forradalmat: adatátvitel, modern kódolás (merthogy kódolást, titkosítást már Julius Caesar is használt), kódfejtés. S hogy a matematikus feje olykor más srófokra jár, mint a közemberé, azt megérezzük akkor is, midőn követni próbáljuk az információk értékére vonatkozó számításokat.

Más srófra jár, ez az érzés újból megkísért, amikor Mosóczi a *halmazelmélet*be ad valamelyes betekintést. S mert nehéz elfogadni, hogy fontos és a maguk nemében tényleg csodás dolgokból így kiszorulunk, az ember töprengeni kezd a miérten. Talán többé-kevésbé helytálló valami olyan magyarázatra jutni, hogy a hosszú-hosszú úton, amelyen eljutottunk mai általános, köznapi gondolkodásunkig, azt azokat a jelenségek és tényezők formálták, amelyekkel elődeink találkoztak, többé-kevésbé megismertek, felfogtak, talán meg is értettek, és szavakba öntöttek. Halmazelmélettel ilyen dolguk nem volt, ahogy a matematika sok más ágával-területével sem. Ez persze nem csak a matematika sajátossága – hazai pályát tekintve szegény laikus akkor sincs jobb helyzetben, ha az iparjogvédelem vagy a szerzői jog sajátos fogalmaival találkozik.

Végtelen halmaz: „*Akkor nevezünk egy halmazt végtelennek, ha van olyan valódi részhalmaza, amelynek az elemszáma megegyezik a teljes halmaz elemszámával.* (Akit ez elsőre zavarba ejt, nyugodjék meg: nincs vele egyedül – Osman P.) Elsőre kicsit gyanúsán szemlélhetjük ezt az állítást – nevezetesen azt, hogy az új vendég megérkezésével hajszálpontosan ugyanannyi vendég van a szállóban, mint azelőtt –, de hát éppen ez az, ami a végtelen halmazt különlegessé teszi.” „A gyanús eseményeknek azonban ezzel még koránt sincs végük. Hilbert szállodája ugyanis az eddigieknél is különösebb dolgokra képes. Ha nemcsak egyetlen új vendég érkezik, hanem végtelen sok, az ő számukra is jut hely. Mindössze annyit kell tenniük a régi lakóknak, hogy mindenki átköltözik egy kétszer akkora sorszámú szobába.” – Végül is, ez is belefér a végtelenbe.

Lelki nyugalmunk borogatása azzal folytatódik, hogy egész szám „van egypúpú, van két-púpú”, azaz páratlan és páros, s ebből úgy vélnénk, hogy „az egész számok éppen kétszer annyian vannak, mint a páros számok – hiszen minden második szám páros”, ám Mosóczi

rögvest eloszlatja e félreértést a halmazelmélet egy alapvető technikájával, az *egyértelmű megfeleltetéssel*: „csak hát itt van aztán a végtelen halmaz meghökkenítő viselkedése, hogy másrészt meg ugyanannyian vannak, hiszen létesíthető köztük egy egyértelmű megfeleltetés: $1 \rightarrow 2$; $2 \rightarrow 4$; $3 \rightarrow 6$; $4 \rightarrow 8$ stb.”, amellyel előbb a beköltöző vendégek második végtelen halmazának is kiosztotta szobáikat.” S már ott is vagyunk, amit bölcselmünk álmodni sem képes, e megfeleltetés viszont bizonyítani tudja: „Igazolni fogjuk azt a meglepő tényt, hogy 0 és 1 között pontosan ugyanannyi valós szám van, mint 1 és végtelen között. Ehhez nem kell más tennünk, mint létesíteni egy egyértelmű megfeleltetést a 0 és 1 közti számok, valamint az 1 és végtelen közti számok között. Íme: $x \rightarrow 1/x$.” S ha úgy érezzük, hogy a halmazelmélet kiütéssel győzött, nyugtasson a tudat, hogy hasonló élményünk lesz majd a *fraktálokkal* is.

A prezentálás győz: A zord valóság, hogy a korábbi nézetekkel ellentétben az ember nem racionális lény. Az ígéretesen hangzó című *A világalom titkos összetevői* kutatási eredményekkel bizonyítja, hogy a mód, ahogyan adatokat élénk tárnak, erősen befolyásolni tudja, hogy miként reagálunk azokra. Adatok, irracionális és befolyásolható – horribile dictu manipulálható – reagálások: igen, a fejezet élénk állítja közgazdaságtan egyik legújabb szakterületét, a *viselkedésgazdaságtant* is. Megtudjuk például, hogy hiába a valószínűségszámítás, döntéseinkben annak számait gyakran felülírja, hogy sokkal inkább a veszteségkerülés hajt, mint a nyereség megszerzése. Kutatások kimutatták, hogy „az emberek sokkal jobban félnek egy adott pénzösszeg elvesztésétől, mint amennyire hasznos számukra egy ugyanakkora pénzösszeg megnyerése”. „A veszteség szó hallatán beindul egy védekező mechanizmus, ami sok esetben megakadályozza azt, hogy racionálisan tudjunk dönteni egy kérdésben. Ezt a védekező mechanizmust az érzelmeink vezérlik, és bizony gyakran állítanak nekünk erre alapozva különféle csapdákat a marketingszakemberek vagy éppen a politikusok.”

Kutatási eredményeket kapunk, miként reagáltak orvosok abszolút szakmai kérdés eldöntésénél a valószínűségek bemutatásával történő manipulálásra. „Az orvosok döntését érezhetően befolyásolta az, hogy ugyanazt a matematikai tényt milyen megfogalmazásban tálták nekik. Ezt a jelenséget Kahnemanék keretezési hatásnak nevezték el, és felfedezése óta alaptananyag minden leendő politikus és marketinges számára. A keretezési hatás egy olyan erős fegyver, amellyel jóformán bármilyen logikus érvet egyetlen csapással meg lehet semmisíteni.”

Itt már rá kell döbbernünk arra is, hogy egy ilyen ismertetés nagyon nem végtelen halmaz. Így már csak annyi maradt, hogy a tartalomjegyzék segítségével bemutassuk a mondanó teljes ívét:

- Kezdetben vala a trigonometria, aztán hamarosan jött a Tízparancsolat is...
- Vajon a logaritmus jó is valamire? (Nagyon is!)
- A nagy átverés és a nagy számok törvénye
- Egyenletek, melyek a világot működtetik – benne, egyebek közt: A skizofrén nullák nagy rejtélye

- Milyen titkokat rejtene a szavak? (A nyelv és az információelmélet)
- Mágikus valószínűségek – benne, egyebek közt: A Pareto-elv; Viszlát, Pareto-elv, üdv, hosszú farok!
- Végtelen szállodák (Halmazelmélet)
- A világalom titkos összetevői (Gondolkodásunk sajátosságairól, viselkedési gazdaságtanról)
- Fraktálok mindenütt – benne: 1,8 dimenzió és más furcsaságok
- Az információ utat tör magának (A napóleoni idők szemaforától a vezetékes távirón át a telefonos hírközlés aranykoráig)
- Akik feltalálták a jövőt – (Válogatott példák a technológiák exponenciálisan gyorsuló forradalmának felíveléséből. Idézzük Mosóczi bevezetőjét:) „A kutatók, akik korábban minden erejükkel a háború győzelméért küzdöttek, a második világháború végeztével egy új fronton szálltak harcba egymással. Ez a tudományos kutatások és technikai bravúrok versenye volt, amely a hidegháborús idők alatt lassanként komoly párbajjá éleződött az egyre jobban egymásnak feszülő szovjet és amerikai rezsimek között. A küzdelem többé már nem a frontvonalon zajlott, hanem a különböző kutatóközpontokban.” (Ismert, gyakran idézett tény, hogy ebben a korban az innovációs ráfordítások több mint fele a tág értelemben vett hadiiparba ment, s a polgári célú innovációk nagy hányada az ott létrehozott és már felszabadított technológiákon alapult.)

Benne:

- „Talán semmi sem szemlélteti jobban ezt a fordulatot, mint Wernher von Braun esete” (az űrverseny amerikai oldala, német gyökereken)
- Határ a csillagos ég (a Szputnyik 1-gyel megnyílt űrkorszak)
- A Sas leszáll (Holdra szállás)
- A Xerox PARC és a grafikus felhasználói felület (mai, felhasználóbarát informatikai megoldásaink ősforrása)
- Az alma és a zseni lop („és Steve Jobs a kapitány”)
- Nincs szoftver, nincs vevő és Gates nyugodt menetelése (Bill Gates és a Microsoft megalkotják a jövő szoftverét)
- Megjelenik a Mac (Jobs és csapata megalkotják a jövő számítógépét – mai laptopjaink, táblagépeink, okostelefonjaink közös őst, s nagyjában-egészében az addigi számítógépgyártók vesztét. Ez a gép testesítette meg mindazt, amit Jobs addig a számítástechnikáról gondolt. A több százszor újratervezett külső megjelenésétől a hardver mesterien megkomponált áramkörein keresztül az operációs rendszer letisztult megjelenéséig, ahol az ikonok „olyan gusztyusosak, hogy legszívesebben megkóstolná őket az ember”.)
- Megszületik az internet

- [Http://www](http://www) (a világháló máig is élő új struktúrája)
- The Times They Are A-Changin' (az internetalapú világ gyors és máig határtalan-
nak tűnő fejlődése)
- Űrutazás fénysebességgel
- Az új gőzgép
- A gondolkodás forradalma (zárógondolatok)

S ma, amikor emberek, cégek, intézmények az életük mind több meghatározó részét techóriások uralta informatikai rendszerekben élik, mindannyian elgondolkozhatunk, milyen is lesz a modern technológiák alkotta szép, új jövő.

Dr. Osman Péter

* * *